Q1 : Base de $Mult^{(n)}(V)$

$B = \{e_1, \dots, e_d\}$ = Base de V

$\vec{j} = (j_1, \dots, j_n) \quad j_i \in \{1, \dots, d\}$

$$e^*_{\vec{j}} : (v_1, \dots, v_n) \in V^n \longrightarrow e^*_{j_1}(v_1)\, e^*_{j_2}(v_2) \cdots\cdots e^*_{j_n}(v_n)$$

$e^*_{j_i}(v_i)$ = j_i-ième coor de v_i

$$e^{*}_{\vec{j}} = e^{*}_{j_1} \otimes \dots \otimes e^{*}_{j_n}$$

Comme les $e^{*}_{j_i}$ sont des formes linéaires

les $e^{*}_{\vec{j}}$ sont multilinéaires :

linéaire en v_1

en v_2

$\vdots$

en v_n

On dispose de d^n formes multilinéaire et on montre que c'est une base de $\mathrm{Mult}^{(n)}(V)$.

- On montre que $\{ e^*_{\vec{J}} \quad \vec{J} \in \{1, \dots, d\}^n \}$ est libre et on montre qu'elle est génératrice.

<u>Point clef</u> : si $\vec{j}, \vec{j}' \in \{1, \dots, d\}^n$

$\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ $\vec{j}' = (j'_1, \dots, j'_n)$

on a

$$e^*_{\vec{j}}(e_{\vec{j}'}) = \delta_{\vec{j} = \vec{j}'} = \begin{cases} 1 \text{ si } \vec{j} = \vec{j}' \\ 0 \text{ si } \vec{j} \neq \vec{j}' \end{cases}$$

où $e_{\vec{j}'} = (e_{j'_1}, \dots, e_{j'_n})$

$$e^*_{\vec{j}}(e_{\vec{j}'}) = e^*_{j_1}(e_{j'_1}) \cdot e^*_{j_2}(e_{j'_2}) \cdot \ldots \cdot e^*_{j_n}(e_{j'_n})$$

$$= \delta_{\vec{j}=\vec{j}'}$$

Elle permet de mq $\{e^*_{\vec{j}} \; \vec{j} \in \{1, \ldots, d\}^n\}$ est libre

Si $\underline{0} = \sum_{\vec{j} \in \{1,\dots,d\}^n} \lambda_{\vec{j}} e^*_{\vec{j}}$ $\quad \lambda_{\vec{j}} \in K$

on calcule les $\lambda_{\vec{j}}$ on évalue en

les différents $e_{\vec{j}'}$: on a

$$\rightsquigarrow 0 = \sum_{\vec{j}} \lambda_{\vec{j}} e^*_{\vec{j}}(e_{\vec{j}'}) = \lambda_{\vec{j}'} . 1 = \lambda_{\vec{j}'}$$

On mq comme c'est génératrice et on a ∩ la formule

$$\Lambda = \sum_{\vec{j}} \Lambda(e_{\vec{j}})\, e^{*}_{\vec{j}}$$

(preuve par récurrence sur n).

Q_2 : Base de $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

B = base de $V = \{e_1, \dots, e_d\}$

B' = ——— $W = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$

$\{ \mathcal{E}_{ij} = e_j^* \cdot f_i \quad i \leq d' \; j \leq d \}$ = base de $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

$\mathcal{E}_{ij}(v) = e_j^*(v) \cdot f_i$

Q3 : forme alternée.

<u>definition</u> : Λ est alternée ssi

$\forall (v_1, \dots, v_n)$ tq $\exists\, i \neq j$ avec $v_i = v_j$

alors $\Lambda(v_1, \dots, v_n) = 0$

- si $Car(K) \neq 2$

alors Λ est alternée ssi

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma.\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma).\Lambda$$

- si $Car(K) = 2$ et que Λ est alternee

$$\sigma\Lambda = \mathrm{sign}(\sigma).\Lambda = \Lambda$$

car $\mathrm{sign}(\sigma)_K = 1_K$.

$\rightsquigarrow \wedge$ est symétrique.

Si $\mathrm{Car}(K) = 2$

$$\mathrm{Alt}^{(n)}(V) \subsetneq \mathrm{Sym}^{(n)}(V) \quad (n > 1)$$

par exemple $e_1^* \otimes e_1^* : (v_1, v_2) \longrightarrow x_{11} \cdot x_{21}$

est symétrique mais pas alternée

car $e_1^* \otimes e_1^* (v_1, v_1) = x_{11} x_{11} \neq 0$ si $x_{11} \neq 0$

- $e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$ est alternée

$$(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_1) = x_{11} x_{12} - x_{12} x_{11} = 0$$

et en car$(K) = 2$ elle est symétrique

$$(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)(v_2, v_1) = -(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2)$$

$$= (e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2)$$

(can in $Car(K) = 2$ $-1/_K = +1/_K$)

$l_1 \otimes \dots \otimes l_n$ et une notation

qui désigne une fct de

$V^n = V \times \dots \times V$ vers K

définie par

$$(l_1 \otimes \dots \otimes l_n)(v_1, \dots, v_n) := l_1(v_1) \cdot l_2(v_2) \times \dots \times l_n(v_n)$$